

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dans cette séance on va voir
- (i) notion de valeur propre et de vecteur propre
 - (ii) notion d'espace propre
 - (iii) notion de polynôme caractéristique
- + exemples

07.11

(Rappel) Une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \longmapsto & \lambda \cdot \vec{x} \end{array}$$

} c'est une application linéaire !

Informel: On veut trouver des "directions" pour lesquelles une app. lin $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se comporte comme une homothétie d'un certain rapport.

Déf. 10.2 Soit $T: V \rightarrow V$ une app. lin. / $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que

$\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T/A s'il existe $v \in V / \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que

$$T(v) = \lambda \cdot v \quad / \quad A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

↑ diff. de notes de Sachs

Informel:

vecteur propre = direction pour laquelle T/A se comporte comme une homothétie

valeur propre = rapport de ↑

vecteur propre avec valeur propre λ

⚠ • On peut avoir plusieurs vecteurs propres non colinéaires pour la même valeur propre.

• Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est vecteur propre de valeur propre λ , alors $c \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est aussi vecteur propre de valeur propre λ si $c \neq 0$ réel.

Exemple 10.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

• $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = (-4) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = (-4) \cdot \vec{v}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A avec valeur propre $\lambda = -4$

Obs $\vec{v} \in \text{Ker}(A) \iff \vec{v}$ est vecteur propre de A avec valeur propre $\lambda = 0$

Exemple $T: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$

$$p(t) = a_0 t + \dots + a_n t^n \mapsto p'(t) = a_1 + 2a_2 t + \dots + n a_n t^{n-1}$$

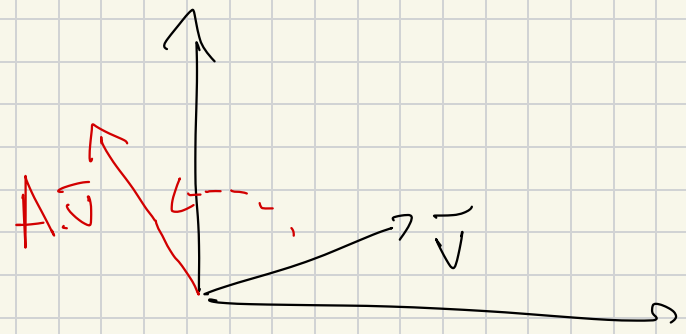
Alors T n'a pas de vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 1$;

i.e. $p' = T(p) = p$ n'a pas de solution non nulle !

Exemple $\text{Rot}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

de 90°

est une application linéaire



n'a pas de vecteurs propres dans $\mathbb{R}^2$ ni de valeurs propres dans $\mathbb{R}$!!

De façon générale :

$$\text{Rot}_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Rot}_{\pi/2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Déf. 10.8 / Soit $T: V \rightarrow V$ app. lin / $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

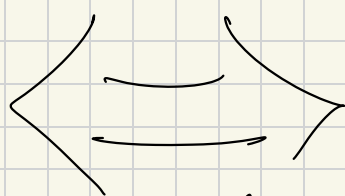
On définit l'espace propre associé à λ :

$$F_\lambda := \{v \in V : T(v) = \lambda \cdot v\} \subseteq V$$

$$F_\lambda := \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Pour $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$:

$\bar{v}$ est vecteur propre
avec valeur propre λ



$$\bar{v} \in F_\lambda \text{ et } \bar{v} \neq 0$$

(de même pour un esp. vect V)

• Comment calculer les valeurs/vecteurs propres d'une matrice?

Idee

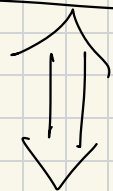
$$A\bar{v} = \lambda\bar{v} \iff A\bar{v} - \lambda\bar{v} = \mathbf{0}$$

$$\iff \underbrace{A\bar{v} - \lambda \cdot I_n \bar{v}} = \mathbf{0}$$

$$\iff (A - \lambda \cdot I_n) \cdot \bar{v} = \mathbf{0}$$

$$\iff \bar{v} \in \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)$$

Quand est-ce que $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\mathbf{0}\}$?



$A - \lambda \cdot I_n$ n'est pas inj.



$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$$

Conclusion
(Thm 10.14)

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ est valeur propre de } A \iff \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$$

Exemple 10.3 (suite) On veut calculer les valeurs propres de
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ on veut
racines de $\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$

$$(2+4)(2-7) = \cancel{2-3}2 - 28 = (1-\lambda)(2-\lambda) - 30 = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

On a un polynôme de degré 2

(Général: $\det(A - \lambda I_n)$ est un polynôme de degré n en λ)

Déf. 10.16 $\det(A - \lambda I_n) =: P_A(\lambda)$ est le polynôme
caractéristique de A .

Dans l'exemple 10.3, on a donc deux valeurs propres: -4 et 7.
Pour calculer les vecteurs propres associés on calcule plutôt

les espaces propres:

$$\underline{F}_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n) \quad (\text{Lemme 15})$$

Pour l'exemple 10.9:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{-4} &= \text{Ker}(A + 4 \cdot I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \stackrel{\text{FER de } A+4I_2}{=} \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 6/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 + \frac{6}{5}x_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -6/5 \cdot x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -6/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\underline{F}_7 = \text{Ker}(A - 7 \cdot I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \stackrel{\text{FER de } A-7I_2}{=} \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Abrs Pour calculer valeurs/vecteurs propres :

① Calculer les racines de $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot I_n)$ ← valeurs propres

② Pour chaque valeur propre λ on calcule (une base de)

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n).$$

formée de vecteurs propres

Exemple 10.3 (suite)

Soit

$$T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } \mathbb{R}^2$$

$$\left(\text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Alors

$$[T_A]_{B_{can}} (= [T_A]_{B_{can} \leftarrow B_{can}}) = [T_A] = A$$

$$[T_A]_B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \left[[T_A \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}]_B \quad [T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_B \right]$$

valeurs propres
respectives

$$= \left[\begin{bmatrix} -4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}_B \right]$$

La formule de changement de base dit

$$= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$[T_A] = P_{B \leftarrow B_{can}} [T_A]_B P_{B \leftarrow B_{can}}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/11 & -1/11 \\ 5/11 & 6/11 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{P}_{A} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{P^{-1}}_{P^{-1}}$$

Convert

$$A^{10} = \underset{0}{2} \underset{1}{9} \underset{1}{2} \underset{1}{9}$$